Über gruppentheoretische Eigenschaften, die sich auf t-Produkte übertragen

Von WOLFGANG P. KAPPE in Columbus (Ohio, USA)

1. Einleitung

Es sei H eine Gruppe und $e(H)$ die Menge der Ordnungen von Elementen aus H. Wir nennen eine Gruppe G das t-Produkt der Normalteiler M und N, falls (i) G/M und G/N periodisch, (ii) $e(G/M) \cap e(G/N) = 1$. Wir sagen, daß eine gruppentheoretische Eigenschaft F sich auf t-Produkte überträgt, falls jedes t-Produkt von zwei F-Normalteilern eine F-Gruppe ist. In der vorliegenden Arbeit zeigen wir für einige Klassen von gruppentheoretischen Eigenschaften, daß sie sich auf t-Produkte übertragen.

Satz 1. *Die folgenden Eigenschaften F übertragen sich auf t-Produkte:*

a) *Jede Eigenschaft F, bei der Produkte von F-Normalteilern F-Gruppen sind* (Beispiele: Nilpotenz, lokale Nilpotenz, Auflösbarkeit).

b) *Die Eigenschaft F = lokal E, falls E sich auf t-Produkte überträgt und E-Gruppen (also auch F-Gruppen) lokal nilpotent sind.*

c) *Die Eigenschaft F = lokal E, falls sich E auf t-Produkte überträgt und E-Gruppen lokal endlich sind.*

Bemerkung. Es sei s eine natürliche Zahl und $P(s, G)$ die von den s-ten Potenzen erzeugte Untergruppe von G. Von F. SZÁSZ [8] ist die Frage aufgeworfen worden nach gruppentheoretischen Eigenschaften F, für die gilt:

($\ast$) Sind $P(m, G)$ und $P(n, G)$ F-Gruppen und $(m, n) = 1$, so ist auch G eine F-Gruppe.

Die Gültigkeit von ($\ast$) ist von F. SZÁSZ [7], [8] für F = zyklisch, und von VL. DLAB [3] für F = abelsch nachgewiesen worden. Da $e(G/P(s, G))$ aus Teilern von s besteht, ist G das t-Produkt der Normalteiler $P(m, G)$ und $P(n, G)$, falls $(m, n) = 1$. Jede Eigenschaft F, die sich auf t-Produkte überträgt, erfüllt damit ($\ast$). Unter Zusatzannahmen kann umgekehrt aus der Gültigkeit von ($\ast$) geschlossen werden, daß F sich auf t-Produkte überträgt. Bestehen nämlich $e(G/M)$ und $e(G/N)$

aus Teilern von Zahlen m bzw. n (was z.B. stets zutrifft, falls F-Gruppen endlich sind), so ist offenbar $P(m, G) \leqq M$ und $P(n, G) \leqq N$. Sind überdies Untergruppen von F-Gruppen wieder F-Gruppen, so sind $P(m, G)$ und $P(n, G)$ F-Gruppen, also G eine F-Gruppe nach $(*)$, da aus $e(G/M) \cap e(G/N) = 1$ offenbar $(m, n) = 1$ folgt.

VL. DLAB [2], [3] hat die folgende Verallgemeinerung $(**)$ der Bedingung $(*)$ betrachtet:

$(**)$ Sind $m_1, \ldots, m_k$ natürliche Zahlen und $P(m_1, G), \ldots, P(m_k, G)$ F-Gruppen, so ist auch $P((m_1, \ldots, m_k), G)$ eine F-Gruppe.

Von VL. DLAB [3] stammt das Ergebnis, daß die Eigenschaft „abelsch mit gegebener Erzeugendenzahl" die Bedingung $(**)$ erfüllt. Wir beweisen dazu:

Satz 2. *Überträgt sich die gruppentheoretische Eigenschaft F auf t-Produkte und sind F-Gruppen lokal nilpotent, so erfüllt F die Bedingung $(**)$.*

Satz 3. *Die folgenden Eigenschaften F übertragen sich auf t-Produkte:*

a) *Sei E eine gruppentheoretische Eigenschaft nilpotenter Gruppen, die sich auf t-Produkte und homomorphe Bilder überträgt, und a, b, c, d ganze Zahlen mit $1 \leqq a \leqq b$ und $0 \leqq c \leqq d$. F sei definiert durch: $H \in F$ genau dann, wenn H nilpotent und $(H_a)^{(c)}/(H_b)^{(d)} \in E$.*

b) *Sei j eine feste Zahl und F definiert durch: $H \in F$ genau dann, wenn H nilpotent der Klasse $c(H) \leqq j$.*

c) *Sei j eine feste Zahl und F definiert durch: $H \in F$ genau dann, wenn H nilpotent und $l(H) \leqq j$.*

d) *Für eine Mächtigkeit k sei F definiert durch: $H \in F$ genau dann, wenn H nilpotent ist und ein Erzeugendensystem T hat mit $|T| \leqq k$.*

e) *F = alle Elemente haben quadratfreie endliche Ordnung.*

Eine große Klasse gruppentheoretischer Eigenschaften endlicher Gruppen, die sich auf t-Produkte übertragen, sind gewisse lokal definierte Formationen ([4], [5, 696]). In Abschnitt 4 werden wir diese Eigenschaften, zu denen auch Überauflösbarkeit gehört, näher untersuchen.

Definitionen und Bezeichnungen

$F(G)$ = Fittinggruppe von G; $\Phi(G)$ = Frattinigruppe von G;

$F_p(G)$ = größter p-nilpotenter Normalteiler von G;

G' = Kommutatorgruppe von G; $c_G X$ = Zentralisator von X in G;

$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$, $[[a_1, \ldots, a_n], a_{n+1}] = [a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}]$;

$[A, B]$ = Gruppe erzeugt von allen $[a, b]$ mit $a \in A$, $b \in B$;

$G_1 = G$, $G_{i+1} = [G_i, G]$, $G^{(o)} = G$, $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$;

$|T|$ = Mächtigkeit der Menge T, $|g|$ = Ordnung von g;

$n(g, X) = |gX/X|$ für $g \in G$ und einen Normalteiler X von G;
π = Menge von Primzahlen, π' = Komplement von π;
π-Zahl: alle Primteiler gehören zu π;
π-Gruppe: alle Elementordnungen sind π-Zahlen.
Hat G die gruppentheoretische Eigenschaft F, so schreiben wir $G \in F$ und nennen G eine F-Gruppe.
Die 1-Gruppe soll jede betrachtete Eigenschaft haben.
U: Klasse aller Gruppen; N: Klasse aller nilpotenten Gruppen;
G ist nilpotent der Klasse $c(G)$: $G_{c(G)} \neq 1$ und $G_{c(G)+1} = 1$;
G ist auflösbar der Länge $l(G) \leqq j$: $G^{(j)} = 1$;
$G \in$ lokal E: jede endlich erzeugte Unterguppe hat E;
G kann von k Elementen erzeugt werden: es gibt ein Erzeugendensystem T von G mit $|T| \leqq k$.

2. Vorbereitende Betrachtungen

Lemma 1. a) *Ist S eine Menge von Normalteilern von G mit*
(i) *G/X periodisch für alle $X \in S$,* (ii) $\bigcap\limits_{X \in S} e(G/X) = 1$,
so gilt für jede Untergruppe H von G

$$H = \prod_{X \in S} (H \cap X)$$

und
(i′) *$H/H \cap X$ periodisch für alle $X \in S$,* (ii′) $\bigcap\limits_{X \in S} e(H/H \cap X) = 1$.

b) *Ist σ ein Homomorphismus von G und G das t-Produkt von M und N, so ist G^σ das t-Produkt von M^σ und N^σ.*

c) *Ist G das t-Produkt von M und N, so folgt für alle i*

$$G_i = M_i N_i.$$

Beweis. a) Für ein festes Element $h \in H$ ist nach Voraussetzung das System der Zahlen $\{n(h, X)\}_{X \in S}$ teilerfremd. Also gibt es eine endliche Menge von Normalteilern $X_1, \ldots, X_r$ aus S mit $(n(h, X_1), \ldots, n(h, X_r)) = 1$ und ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_r$ mit $1 = a_1 n(h, X_1) + \ldots + a_r n(h, X_r)$. Aus $h^{n(h, X)} \in H \cap X$ folgt dann $H \subseteq \prod\limits_{X \in S} (H \cap X)$ und die andere Inklusion ist trivial. Schließlich folgen (i′) und (ii′) aus (i) und (ii) wegen $H/H \cap X \cong HX/X \subseteq G/X$.

b) Offenbar ist $e(G^\sigma/X^\sigma) \subseteq e(G/X)$.

c) Aus der Definition von G_i folgt $G_i \geqq M_i N_i$. Wir zeigen umgekehrt $c(G/M_i N_i) \leqq i-1$, woraus $G_i = M_i N_i$ folgt, da G_i der Durchschnitt aller Normalteiler Y von G mit $c(G/Y) \leqq i-1$. Nach Lemma 1a haben wir $G = MN$, und $H = G/M_i N_i$ ist nilpotent als Produkt der nilpotenten Normalteiler $NM_i/M_i N_i$ und $MN_i/M_i N_i$. Also genügt es, $H_i = H_{i+1}$ zu zeigen. Nach Lemma 1b ist H/H_{i+1} das t-Produkt zweier Normalteiler M^* und N^* mit $c(M^*) \leqq i-1$ und $c(N^*) \leqq i-1$. Für $x_1, \ldots, x_i \in H/H_{i+1}$ sei a das Produkt der Zahlen $n(x_1, M^*), \ldots, n(x_i, M^*)$, und

b das Produkt $n(x_1, N^*)\ldots n(x_i, N^*)$. Dann ist $(a, b)=1$ und $x_j^a \in M^*$ und $x_j^b \in N^*$ für $j=1, \ldots, i$. Aus $c(M^*) \leqq i-1$ und $c(N^*) \leqq i-1$ ergibt sich

$$[x_1^a, \cdots, x_i^a] = 1 \quad \text{und} \quad [x_1^b, \cdots, x_i^b] = 1.$$

Vermöge $c(H/H_{i+1}) \leqq i$ folgt daraus

$$[x_1, \cdots, x_i]^{a^i} = [x_1, \cdots, x_i]^{b^i} = 1,$$

also $[x_1, \ldots, x_i]=1$ wegen $(a^i, b^i)=(a, b)=1$. Damit ist $c(H/H_{i+1}) \leqq i-1$, d.h. $H_i = H_{i+1}$ bewiesen.

Lemma 2. a) *Wird eine nilpotente Gruppe G durch $T \cup G_2$ erzeugt, so erzeugt T bereits G. Insbesondere kann G durch k Elemente erzeugt werden genau dann, wenn dies für G/G_2 zutrifft.*

b) *Ist G_i/G_{i+1} eine π-Gruppe, so ist G_i/G_k eine π-Gruppe für jedes $k \geqq i$.*

c) *Sei G eine lokal nilpotente Gruppe und T ein Erzeugendensystem von G. Dann ist G eine π-Gruppe genau dann, wenn T aus π-Elementen besteht. G ist endliche π-Gruppe genau dann, wenn T endlich ist und aus π-Elementen besteht.*

d) *Ist G das t-Produkt der nilpotenten Normalteiler M und N, so ist G_i das t-Produkt von M_i und N_i.*

Beweis. a) Ist σ ein Homomorphismus von G und T ein Erzeugendensystem von G, so ist T^σ ein Erzeugendensystem für G^σ. Erzeugt umgekehrt das System $T \subseteqq G$ zusammen mit G_2 die Gruppe G, so folgt aus

$$[ab, c] \equiv [a, c][a, c, b][b, c] \equiv [a, c][b, c] \bmod G_3,$$

daß G_2 in der von T und G_3 erzeugten Untergruppe enthalten ist. Also wird G von T und G_3, und induktiv von T und G_i erzeugt. Wegen $G_{c(G)+1} = 1$ ist damit gezeigt, daß T die Gruppe erzeugt.

b) Offenbar genügt es zu zeigen, daß G_{i+1}/G_{i+2} eine π-Gruppe ist. Sind $a, b \in G_i$, $c \in G$ und k eine natürliche Zahl, so ist

$$[ab, c] \equiv [a, c][b, c] \bmod G_{i+2}, \quad [a^k, c] \equiv [a, c]^k \bmod G_{i+2}.$$

Also sind die Elemente $[a, c]$ mod G_{i+2} π-Elemente, und da sie die abelsche Gruppe G_{i+1}/G_{i+2} erzeugen, ist G_{i+1}/G_{i+2} eine π-Gruppe.

c) Die Bedingungen sind offenbar notwendig. Da weiter in jedem Element $g \in G$ nur endlich viele Erzeugende auftreten und G lokal nilpotent ist, können wir wir uns auf den Fall nilpotenter Gruppen beschränken. Die abelsche Gruppe G/G_2 wird von π-Elementen erzeugt, ist also eine π-Gruppe, und nach Lemma 2b folgt, daß $G = G_1/G_{c(G)+1}$ eine π-Gruppe ist. Erzeugt $T(i) \cup G_{i+1}$ die Gruppe G_i, so folgt aus $[ab, c] \equiv [a, c][b, c]$ mod G_{i+2} für $a, b \in G_i$ und $c \in G$, daß die Kommutatoren $[a, c]$ mit $a \in T(i)$, $c \in T$ zusammen mit G_{i+2} die Gruppe G_{i+1} erzeugen. Ist also

T endlich, so sind auch alle $T(i)$ endlich, und die abelschen π-Gruppen G_i/G_{i+1} sind endlich. Also ist auch $G=G_1/G_{c(G)+1}$ eine endliche π-Gruppe.

d) Sei $H=G/M_i$, $X=M/M_i$ und $Y=NM_i/M_i$. Nach Lemma 1b ist H das t-Produkt von X und Y, und nach Lemma 1c gilt $H_i=X_iY_i=Y_i$, $H_{i+1}=X_{i+1}Y_{i+1}$. Sind $h_1, \ldots, h_i$ Elemente von H und a das Produkt der Zahlen $n(h_1, X), \ldots, n(h_i, X)$, so ist $[h_1^a, \ldots, h_i^a]=1$ wegen $c(X)\leqq i-1$, also

$$[h_1, \ldots, h_i]^{a^i} \equiv 1 \bmod Y_{i+1}$$

wegen $c(H/Y_{i+1})\leqq i$. Nach Voraussetzung ist a, also auch a^i, eine π-Zahl, und wir haben damit gezeigt, daß die abelsche Gruppe $H_i/Y_{i+1}=Y_i/Y_{i+1}$ eine π-Gruppe ist. Nach Lemma 2b folgt, daß die nilpotente Gruppe Y_i eine π-Gruppe ist, und damit haben wir schließlich, daß $G_i/M_i=H_i=Y_i$ eine π-Gruppe ist. Ebenso folgt, daß G_i/N_i eine π'-Gruppe ist, und folglich ist $e(G_i/M_i)\cap e(G_i/N_i)=1$.

3. Beweis der Sätze

Beweis von Satz 1. a) Nach Lemma 1a ist $G=MN$.

b) Sei H eine endlich erzeugbare Untergruppe von G. Die Normalteiler M und N sind lokal nilpotent, also auch $G=MN$, H, $H/H\cap M$ und $H/H\cap N$. Da H endlich erzeugbar ist, sind $H/H\cap M$ und $H/H\cap N$ endlich nach Lemma 2c, also $H\cap M$ und $H\cap N$ endlich erzeugbar [8, V. 1. c. Corollary]. Nun gilt $H\cap M\in E$ und $H\cap N\in E$, und nach Lemma 1a ist H das t-Produkt von $H\cap M$ und $H\cap N$. Nach Voraussetzung ist daher $H\in E$ und somit $G\in$ lokal E.

c) Die Normalteiler M und N sind lokal endlich, also auch $H/H\cap M\cong \cong HM/M\subseteqq G/M = NM/M\cong N/N\cap M$ und $H/H\cap N$ für jede Untergruppe H von $G=MN$. Ist nun H endlich erzeugbar, so sind $H/H\cap N$ und $H/H\cap M$ endlich, also $H\cap M$ und $H\cap N$ endlich erzeugbar [8, V. 1. c. Corollary]. Nach Lemma 1a ist H das t-Produkt der E-Normalteiler $H\cap M$ und $H\cap N$, und nach Voraussetzung folgt $H\in E$.

Beweis von Satz 2. Es genügt offenbar Satz 2 für $k=2$ zu beweisen. Mit $m=(m,n)c$ und $n=(m,n)d$ hat man $(g^{(m,n)})^c\in P(m, G)$ und $(g^{(m,n)})^d\in P(n, G)$ für alle $g\in G$. Die Elemente $g^{(m,n)}$ sind Erzeugende für $P\big((m,n), G\big)$, und aus $(c,d)=1$ und Lemma 2c folgt, daß $P\big((m,n), G\big)$ das t-Produkt von $P(m, G)$ und $P(n, G)$ ist.

Beweis von Satz 3. a) Satz 3a ist nur ein Beispiel für die Anwendung des allgemeineren Ergebnisses in Lemma 2d. Danach ist G_a das t-Produkt von M_a und N_a, also $(G_a)^{(1)}$ das t-Produkt von $(M_a)^{(1)}$ und $(N_a)^{(1)}$, und induktiv $(G_a)^{(c)}$ das t-Produkt von $(M_a)^{(c)}$ und $(N_a)^{(c)}$. Nach Lemma 1b ist $(G_a)^{(c)}/(G_b)^{(d)}$ das t-Produkt von $(M_a)^{(c)}$ mod $(G_b)^{(d)}$ und $(N_a)^{(c)}$ mod $(G_b)^{(d)}$. Wegen $(G_b)^{(d)}=(M_b)^{(d)}(N_b)^{(d)}$ sind $(M_a)^{(c)}$ mod

$(G_b)^{(d)}$ und $(N_a)^{(c)}$ mod $(G_b)^{(d)}$ homomorphe Bilder der E-Gruppen $(M_a)^{(c)}/(M_b)^{(d)}$ bzw. $(N_a)^{(c)}/(N_b)^{(d)}$, also ist $(G_a)^{(c)}/(G_b)^{(d)}$ nach Voraussetzung eine E-Gruppe.

b) Folgt aus Lemma 1c direkt wegen $G_{j+1}=M_{j+1}N_{j+1}=1$, oder als Spezialfall von Satz 3a mit $b=a+1$, $c=d=0$, und $E=N$ für $a\leqq j$ und $E=1$ für $a>j$.

c) Spezialfall von Satz 3a mit $a=b=1$, $d=c+1$, $E=N$ für $c<j$ und $E=1$ für $c\geqq j$.

d) Nach Lemma 2a ist zu zeigen, daß G/G_2 von k Elementen erzeugt werden kann. Nach Lemma 1c ist $G_2=M_2N_2$, und die abelsche Gruppe G/G_2 ist das t-Produkt zweier abelscher Normalteiler mit höchstens k Erzeugenden nach Lemma 1b. Die Behauptung ist trivial für unendliches k, und für endliches k folgt sie leicht aus dem Hauptsatz über endlich erzeugbare abelsche Gruppen.

e) Zusammen mit Satz 3b erhalten wir z.B., daß sich $F=$„elementar abelsch" auf t-Produkte überträgt. Da M und N periodisch sind, ist auch $G=MN$ periodisch. Angenommen, es gibt ein Element $g\in G$ der Ordnung p^2, p eine Primzahl. Dann ist $g^{n(g,M)}\in M$ und $g^{n(g,N)}\in N$, und p^2 ein Teiler von $n(g,M)|g^{n(g,M)}|$ und $n(g,N)|g^{n(g,N)}|$. Nach Voraussetzung sind $|g^{n(g,M)}|$ und $|g^{n(g,N)}|$ quadratfrei, also ist p ein Teiler von $n(g,M)$ und $n(g,N)$, was $e(G/M)\cap e(G/N)=1$ widerspricht.

4. Lokal definierte Formationen

Definition ([4], [5, VI. § 7]). a) Eine Klasse F endlicher Gruppen heißt eine *Formation*, falls gilt:

(i) Mit $G\in F$ gehören alle epimorphen Bilder zu F.

(ii) Aus $G/M\in F$ und $G/N\in F$ folgt $G/M\cap N\in F$.

b) Ist H/K ein *Hauptfaktor* der Gruppe G und $p|\,|H/K|$, so heißt H/K ein p-Hauptfaktor von G.

Jeder Primzahl p sei eine Formation $F(p)$ zugeordnet. Dann wird durch die folgende Vorschrift eine Formation F lokal durch das System $\{F(p)\}$ definiert: $G\in F$ genau dann, wenn gilt:

(1) Ist $F(p)$ leer, so sei p kein Teiler von $|G|$.

(2) Ist $F(p)$ nichtleer, so gehört die von G in p-Hauptfaktoren H/K von G induzierte Automorphismengruppe $G/c_G(H/K)$ zu $F(p)$.

Lokal definierte Formationen F erfüllen außerdem [5, VI. 7. 5].

(iii) Aus $G/\Phi(G)\in F$ folgt $G\in F$.

Nach einem Ergebnis von Lubeseder [5, VI. 7. 25] lassen sich die (iii) genügenden Formationen endlicher auflösbarer Gruppen lokal definieren.

Lemma 3 ([5, VI. 7. 4]). *Sei F lokal definiert durch das System $\{F(p)\}$. Dann sind gleichwertig:*

a) $G\in F$.

b) *Ist $F(p)$ leer, so ist $p\nmid|G|$. Für nichtleeres $F(p)$ gilt $G/F_p(G)\in F(p)$.*

Satz 4. *Sei F eine lokal durch das System $\{F(p)\}$ definierte Formation. Überträgt sich $F(p)$ auf t-Produkte, so überträgt sich auch F auf t-Produkte.*

Beweis. Sei G das t-Produkt der F-Gruppen A und B. Nach Lemma 1a haben wir $G=AB$. Ist dann $F(p)=\emptyset$, so folgt aus $p\nmid |A|$ und $p\nmid |B|$ sofort $p\nmid |G| \mid |A|\,|B|$. Für $F(p)\neq\emptyset$ bezeichne α den natürlichen Homomorphismus von G auf $G/F_p(G)$. Da $A\cap F_p(G)$ ein p-nilpotenter Normalteiler von A ist, gilt $A\cap F_p(G)\subseteqq F_p(A)$. Dann ist $A^\alpha\cong AF_p(G)/F_p(G)\cong A/(A\cap F_p(G))$ als homomorphes Bild von $A/F_p(A)\in F(p)$ eine $F(p)$-Gruppe, und ebenso folgt $B^\alpha\in F(p)$. Nach Lemma 1b ist G^α das t-Produkt von A^α und B^α, also gehört G^α nach Voraussetzung auch zu $F(p)$ und nach Lemma 3 folgt $G\in F$.

Folgerung. *Die folgenden Eigenschaften endlicher Gruppen übertragen sich auf t-Produkte:*

a) *Nilpotenz;*

b) *Überauflösbarkeit;*

c) *p-Überauflösbarkeit;*

d) *Nilpotenz der Kommutatorgruppe;*

e) *Jede lokal durch ein System $\{F(p)\}$ definierte Formation F, bei der alle $F(p)$ nilpotent sind;*

f) *Jede* (iii) *genügende Formation F, bei der $G/F(G)$ nilpotent ist für jedes $G\in F$.*

Beweis. a) Nilpotenz wird lokal definiert durch $F(p)=1$.

b) Überauflösbarkeit wird lokal definiert durch: $F(p)=$alle endlichen abelschen Gruppen von $p-1$ teilendem Exponenten.

c) p-Überauflösbarkeit ([5, VI. 8. 3]): $F(q)=U$ für $q\neq p$, und $F(p)=$alle endlichen abelschen Gruppen von $p-1$ teilendem Exponenten.

d) Nilpotenz der Kommutatorgruppe: $F(p)=$alle endlichen abelschen Gruppen

e) Sei $F(p)$ eine Formation nilpotenter Gruppen, und H das t-Produkt der $F(p)$-Gruppen K und L. Da in endlichen nilpotenten Gruppen die Sylowgruppen direkte Faktoren sind, gehören nach (i) mit K und L auch die Sylowgruppen von K und L zu $F(p)$. Wegen $e(H/K)\cap e(H/L)=1$ sind die Sylowgruppen von K und L auch Sylowgruppen von H, und nach (ii) gehört damit auch H als direktes Produkt seiner Sylowgruppen zu $F(p)$.

Die in a) bis e) genannten Formationen erfüllen somit die Voraussetzungen von Satz 4.

Daß sich die Eigenschaft Überauflösbarkeit auf t-Produkte überträgt, folgt auch aus einem Ergebnis von BAER [1, section 11, Corollary 2]: Das Produkt G zweier überauflösbarer Normalteiler M und N ist überauflösbar genau dann, wenn G' nilpotent ist.

Ist G das t-Produkt der überauflösbaren Gruppen M und N, so ist $G=MN$, und M', N' sind nilpotent. Nach Lemma 1c ist $G' = M'N'$, also nilpotent, und damit G überauflösbar.

f) Die formation F genügt (iii) und besteht aus auflösbaren Gruppen, da $G/F(G)$ nilpotent ist für $G \in F$. Nach dem Satz von LUBESEDER [5, VI. 7. 25] kann F lokal durch ein System $\{F^*(p)\}$ definiert werden. Bezeichnet N die Formation der nilpotenten Gruppen, so ist wegen $F(G) \subseteqq F_p(G)$ sicher $G/F_p(G) \in F^*(p) \cap N$ und F kann lokal auch durch $F(p) = F^*(p) \cap N$ definiert werden. Da $F(p)$-Gruppen nilpotent sind, folgt f) aus e).

Die dem Beweis von Satz 4 zugrunde liegende Schlußweise läßt sich auf größere Klassen von Gruppen und ähnlich definierte Eigenschaften ausdehnen.

Definition. Sei K eine Klasse von (nicht notwendig endlichen) Gruppen und g ein Funktor, der jeder Gruppe $G \in K$ eine charakteristische Untergruppe $g(G)$ zuordnet derart, daß (‡) $g(X) \subseteqq g(G)$ für jeden Normalteiler X von G. Zu g und jeder Eigenschaft E, die sich auf homomorphe Bilder vererbt, sei eine neue Eigenschaft $[E, g]$ definiert durch: $G \in [E, g]$ genau dann, wenn $G \in K$ und $G/g(G) \in E$.

Satz 5. *Überträgt sich E auf t-Produkte, so auch* $[E, g]$.

Beweis. Ist G das t-Produkt von A und B, α der Homomorphismus von G auf $G/g(G)$, so ist $G = AB$ nach Lemma 1a und G^α das t-Produkt von A^α und B^α nach Lemma 1b Weiter ist $g(A) \subseteqq g(G)$, also $g(A) \subseteqq A \cap g(G)$, und damit $A^\alpha \cong Ag(G)/g(G) \cong A/(A \cap g(G))$ eine E-Gruppe als homomorphes Bild von $A/g(A) \in E$. Also ist G^α das t-Produkt der E-Gruppen A^α und B^α, und damit $G \in [E, g]$ bewiesen.

Beispiele für Funktoren, die (‡) erfüllen:

Für endliche Gruppen: $F_p(G)$, $\Phi(G)$, $F(G)$, $O_p(G)$ = maximaler p-Normalteiler. Iterierte Funktoren dieser Art.

Für beliebige Gruppen: $\varphi(G)$ = Hirsch—Plotkin-Radikal, G_i, $G^{(i)}$.

Literaturverzeichnis

[1] R. BAER, Classes of finite groups and their properties, *Ill. J. Math.*, **1** (1957), 115—187.

[2] VL. DLAB, On cyclic groups, *Czech. Math. J.*, **10 (85)** (1960), 244—254.

[3] VL. DLAB, A note on powers of a group, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 177—178.

[4] W. GASCHÜTZ, Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen, *Math. Z.*, **80** (1963), 300—305.

[5] B. HUPPERT, *Endlichen Gruppen*. I (Berlin, 1967).

[6] E. SCHENKMAN, *Group theory* (Princeton, 1965).

[7] F. SZÁSZ, Über Gruppen, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 83—84.

[8] F. SZÁSZ, Bemerkungen zu meiner Arbeit „Über Gruppen, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind", *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 64—66.

(Eingegangen am 6. März 1968)